遠近法の射影変換パラメータ計算の高速化

2010.04.24 NyARToolkit project　nyatla@nyatla.jp

遠近法のパラメータは、8x8 行列の逆行列から求めることができるが、これは計算量が多い。この問題を解決するため、行列を 2 つの 4x4 の行列に分解し、連立方程式で解く事を考える。

手順

遠近法の基本式

$$\begin{cases} x = \frac{AX+BY+C}{GX+HY+1} \\ y = \frac{DX+EY+F}{GX+HY+1} \end{cases} \quad \cdots(1)$$

(1)を展開

$$\begin{cases} AX + BY + C - GXx - HYx = x \\ DX + EY + F - GXy - HYy = y \end{cases} \quad \cdots(2)$$

(2)に 4 頂点分の座標を投入して行列を作る。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 1 & -X_1x_1 & -Y_1x_1 \\ X_2 & Y_2 & 1 & -X_2x_2 & -Y_2x_2 \\ X_3 & Y_3 & 1 & -X_3x_3 & -Y_3x_3 \\ X_4 & Y_4 & 1 & -X_4x_4 & -Y_4x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 1 & -X_1y_1 & -Y_1y_1 \\ X_2 & Y_2 & 1 & -X_2y_2 & -Y_2y_2 \\ X_3 & Y_3 & 1 & -X_3y_3 & -Y_3y_3 \\ X_4 & Y_4 & 1 & -X_4y_4 & -Y_4y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \cdots(3)$$

5*4 行列を 4*4 行列に変換する。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1x_1 & -Y_1x_1 \\ X_2 & Y_2 & -X_2x_2 & -Y_2x_2 \\ X_3 & Y_3 & -X_3x_3 & -Y_3x_3 \\ X_4 & Y_4 & -X_4x_4 & -Y_4x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - C \\ x_2 - C \\ x_3 - C \\ x_4 - C \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1y_1 & -Y_1y_1 \\ X_2 & Y_2 & -X_2y_2 & -Y_2y_2 \\ X_3 & Y_3 & -X_3y_3 & -Y_3y_3 \\ X_4 & Y_4 & -X_4y_4 & -Y_4y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ E \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - F \\ y_2 - F \\ y_3 - F \\ y_4 - F \end{bmatrix} \end{cases} \quad \cdots(4)$$

行列の定義

$$
\begin{cases}
[\mathrm{T_x}] = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1x_1 & -Y_1x_1 \\ X_2 & Y_2 & -X_2x_2 & -Y_2x_2 \\ X_3 & Y_3 & -X_3x_3 & -Y_3x_3 \\ X_4 & Y_4 & -X_4x_4 & -Y_4x_4 \end{bmatrix} \\
[\mathrm{T_y}] = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & -X_1y_1 & -Y_1y_1 \\ X_2 & Y_2 & -X_2y_2 & -Y_2y_2 \\ X_3 & Y_3 & -X_3y_3 & -Y_3y_3 \\ X_4 & Y_4 & -X_4y_4 & -Y_4y_4 \end{bmatrix}
\end{cases} \cdots(5)
\qquad
\begin{cases}
[\mathrm{T_x}]^{-1} = \begin{bmatrix} t_{x11} & t_{x12} & t_{x13} & t_{x14} \\ t_{x21} & t_{x22} & t_{x23} & t_{x24} \\ t_{x31} & t_{x32} & t_{x33} & t_{x34} \\ t_{x41} & t_{x42} & t_{x43} & t_{x44} \end{bmatrix} \\
[\mathrm{T_y}]^{-1} = \begin{bmatrix} t_{y11} & t_{y12} & t_{y13} & t_{y14} \\ t_{y21} & t_{y22} & t_{y23} & t_{y24} \\ t_{y31} & t_{y32} & t_{y33} & t_{y34} \\ t_{y41} & t_{y42} & t_{y43} & t_{y44} \end{bmatrix}
\end{cases} \cdots(6)
$$

係数を求める行列を計算。

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} A \\ B \\ G \\ H \end{bmatrix} = [\mathrm{T_x}]^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - C \\ x_2 - C \\ x_3 - C \\ x_4 - C \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} D \\ E \\ G \\ H \end{bmatrix} = [\mathrm{T_y}]^{-1} \begin{bmatrix} y_1 - F \\ y_2 - F \\ y_3 - F \\ y_4 - F \end{bmatrix}
\end{cases} \cdots(7)
\qquad
\begin{cases}
\begin{bmatrix} A \\ B \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x11} & t_{x12} & t_{x13} & t_{x14} \\ t_{x21} & t_{x22} & t_{x23} & t_{x24} \\ t_{x31} & t_{x32} & t_{x33} & t_{x34} \\ t_{x41} & t_{x42} & t_{x43} & t_{x44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - C \\ x_2 - C \\ x_3 - C \\ x_4 - C \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} D \\ E \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{y11} & t_{y12} & t_{y13} & t_{y14} \\ t_{y21} & t_{y22} & t_{y23} & t_{y24} \\ t_{y31} & t_{y32} & t_{y33} & t_{y34} \\ t_{y41} & t_{y42} & t_{y43} & t_{y44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - F \\ y_2 - F \\ y_3 - F \\ y_4 - F \end{bmatrix}
\end{cases} \cdots(8)
$$

(8)を展開する。

$$
\begin{cases}
A = t_{x11}x_1 + t_{x12}x_2 + t_{x13}x_3 + t_{x14}x_4 - C(t_{x11} + t_{x12} + t_{x13} + t_{x14}) \\
B = t_{x21}x_1 + t_{x22}x_2 + t_{x32}x_3 + t_{x42}x_4 - C(t_{x21} + t_{x22} + t_{x23} + t_{x24}) \\
G = t_{x31}x_1 + t_{x23}x_2 + t_{x33}x_3 + t_{x43}x_4 - C(t_{x31} + t_{x32} + t_{x33} + t_{x34}) \\
H = t_{x41}x_1 + t_{x24}x_2 + t_{x34}x_3 + t_{x44}x_4 - C(t_{x14} + t_{x24} + t_{x34} + t_{x44})
\end{cases}
\begin{cases}
D = t_{y11}y_1 + t_{y12}y_2 + t_{y13}y_3 + t_{y14}y_4 - F(t_{y11} + t_{y12} + t_{y13} + t_{y14}) \\
E = t_{y21}y_1 + t_{y22}y_2 + t_{y23}x_3 + t_{y24}y_4 - F(t_{y21} + t_{y22} + t_{y23} + t_{y24}) \\
G = t_{y31}y_1 + t_{y32}y_2 + t_{y33}y_3 + t_{y34}y_4 - F(t_{y31} + t_{y32} + t_{y33} + t_{y34}) \\
H = t_{y41}y_1 + t_{y42}y_2 + t_{y43}y_3 + t_{y44}y_4 - F(t_{y41} + t_{y42} + t_{y43} + t_{y44})
\end{cases} \cdots(11)
$$

G,H の式に着目して、C,F の方程式を解く。

C,F が得られると、A,B,D,E,G,H を求めることができる。